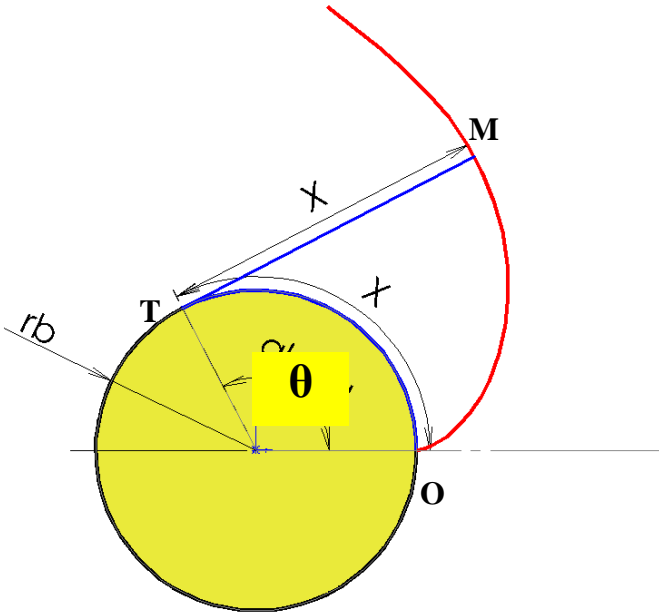


LOIS DE LA DEVELOPPANTE DE CERCLE

Loi principale

La longueur développée = La longueur enroulée

relation 1 : $X = r_b \cdot \theta$



analyse cinématique :

Le déplacement le long de la développante de cercle peut être considéré comme la composition d'un mouvement de rotation avec un mouvement de translation "combiné".

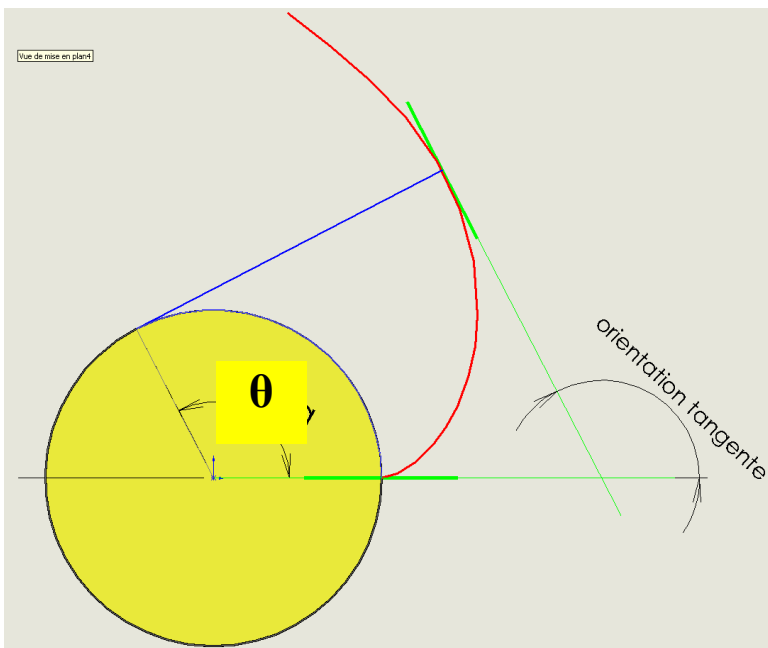
$$OM = OT + TM$$

ou

la rotation de la développante de cercle combinée au déplacement d'un point sur la développante de cercle aboutit à un mouvement de translation (pour le bout du fil, tourner la pelote et la dérouler aboutit à une translation).

Conséquences, propriétés

Propriété 1

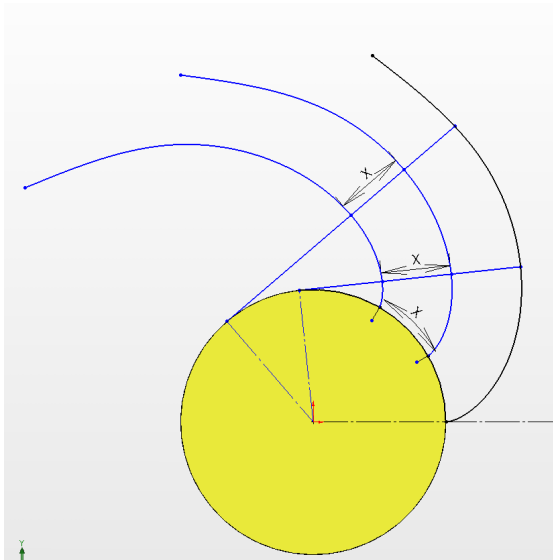


La tangente à la courbe dans le repère absolu est égale à l'angle de déroulé téta. (c'est peut être finalement évident).

$$\text{orientation plan de contact} = \theta$$

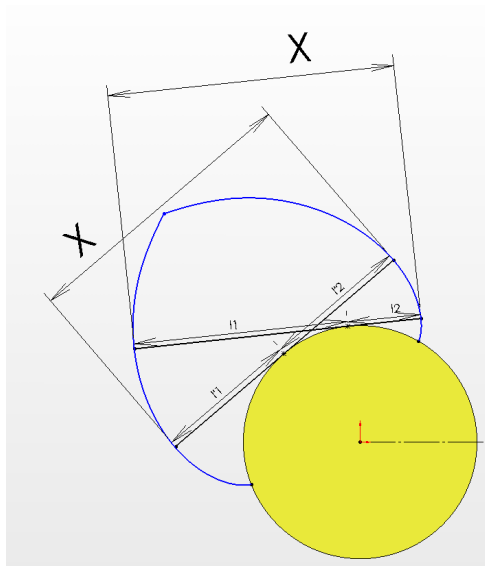
La rotation de la développante de cercle offre une tangente d'angle constant (voir plus loin analyse angulaire du mouvement).

Propriété 2



Les développantes sont équidistantes (propriété de n'importe quelle développante)

Propriété 3



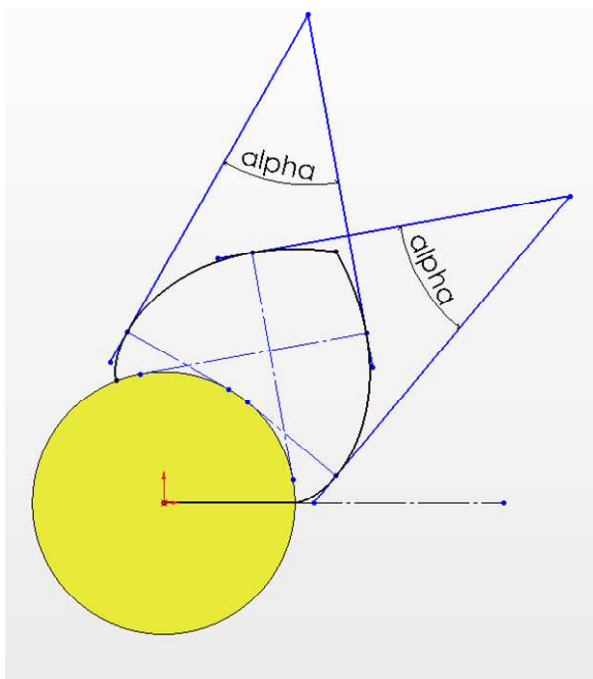
Egalement 2 développantes opposées constituent un profil d'épaisseur constante (puisque l'une s'enroule d'autant que l'autre se déroule)

Cette cote d'épaisseur est tangente au rayon de base et roule sans glisser sur ce cercle de base

cette cote X vaut $2r_b \gamma$

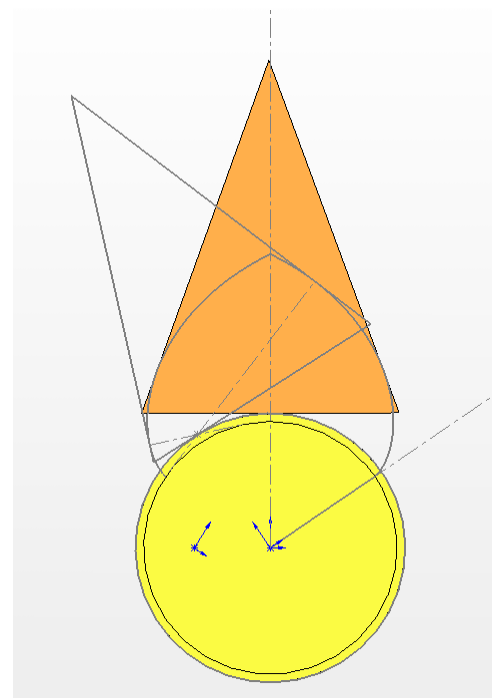
Quelque soit l'épaisseur de la dent, celle-ci a toujours un diamètre.

Propriété 4



Propriété équivalente : un dièdre d'angle donné qui encadre 2 développantes opposées roule sans glisser sur un cercle appelé cercle primitif de rayon

$$r_p = r_b / \cos(\alpha).$$



Equation polaire de la développante (paramétrée en α) :

on cherche une relation entre r et γ : $r = f(\gamma)$

l'expression la plus simple sera sous une forme paramétrique à partir du paramètre α qui est l'angle de la tangente par rapport au rayon.

θ est l'angle de déroulé nécessaire pour obtenir une tangente de X

γ est l'épaisseur de dent angulaire du point M consommée depuis le point de début de la développante.

r est la position diamétrale du point M.

Relation 2 : $\gamma = \theta - \alpha$

Dans le triangle rectangle

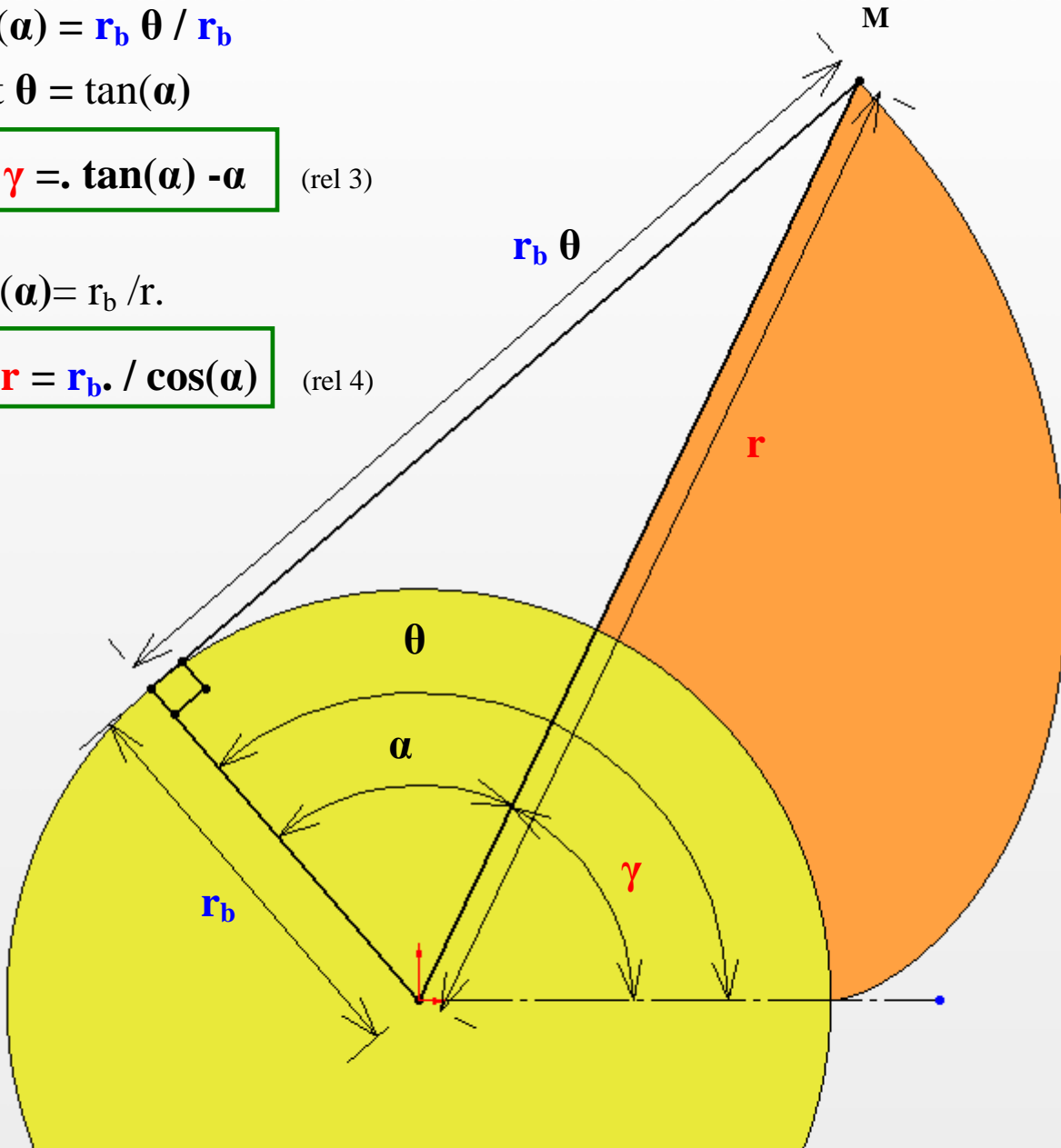
$$\tan(\alpha) = r_b \theta / r_b$$

$$\text{soit } \theta = \tan(\alpha)$$

$$\text{d'où } \gamma = \tan(\alpha) - \alpha \quad (\text{rel 3})$$

$$\cos(\alpha) = r_b / r.$$

$$\text{d'où } r = r_b / \cos(\alpha) \quad (\text{rel 4})$$



Remarques :

- calculer alpha en fonction de gamma est difficile par le calcul (fonction involute inverse). en revanche, si la donnée est r, tout se calcule facilement.
- l'angle alpha sera connu lorsque l'on sera au diamètre primitif.
- l'angle gamma sera connu pour des contraintes d'épaisseur de dent

$$\theta = \sqrt{\frac{r^2}{r_b^2} - 1}$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{r_b}{r}\right)$$

$$\gamma = \text{inv}\left[\cos^{-1}\left(\frac{r_b}{r}\right)\right]$$

$$\text{rappel: inv}(x) = \tan x - x$$

rb=10 r	gamma	téta	alpha
10	0,00	0,00	
10,05	0,02	5,74	5,72
10,1	0,05	8,12	8,07
10,2	0,15	11,52	11,37
10,3	0,28	14,14	13,87
10,4	0,42	16,37	15,95
10,6	0,77	20,15	19,37
10,8	1,18	23,38	22,20
11	1,64	26,26	24,62
11,5	2,95	32,54	29,60
12	4,45	38,01	33,56
14	11,73	56,15	44,42
16	20,25	71,58	51,33
18	29,51	85,77	56,26
20	39,25	99,26	60,01
25	64,87	131,31	66,43
30	91,55	162,09	70,54
40	146,41	221,95	75,54
50	202,27	280,74	78,48

Note la première relation se déduit par une propriété de la fonction tangente ou en exprimant pythagore dans le triangle rectangle

$$\alpha = \tan^{-1}\left[\sqrt{\frac{r^2}{r_b^2} - 1}\right]$$

on peut exprimer en fonction de l'arctangente plutôt qu'avec l'arccosinus.

$$\gamma = \text{inv}\left[\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{r^2}{r_b^2} - 1}\right)\right]$$

hauteur de dent minimum pour guider

Z	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
r/rb	6.36	3.3	2.32	1.87	1.6	1.45	1.34	1.27	1.22	1.18				
gamma	279	108	55	33	20.3	13.77	9.53	6.98	5.09	3.89				

analyse angulaire de la composition de mouvement

Lors du mouvement, analyse de la tangente à la développante dans un repère absolu :

Le point de contact s'oriente de téta (mouvement d'entraînement de la roue)

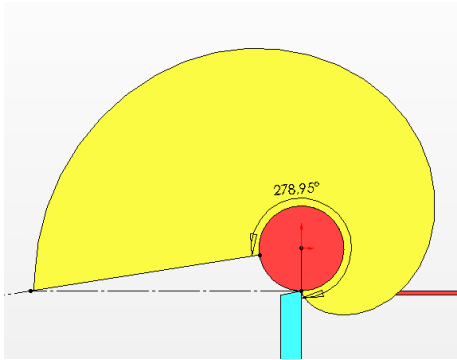
il recule en même temps de gamma (car remonte la développante -mouvement relatif de glissement)

il se réoriente de alpha (angle de tangence relatif au rayon)

La somme algébrique de ces angles étant nulle, la tangence reste donc constante. C'était évident.

Application de la développante à transformation de mouvement rotation translation:

I) Développante "escargot"

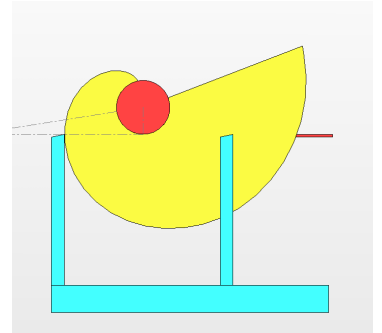


objectif : guider avec le même profil sur un tour dans le but de pouvoir guider les autres tours

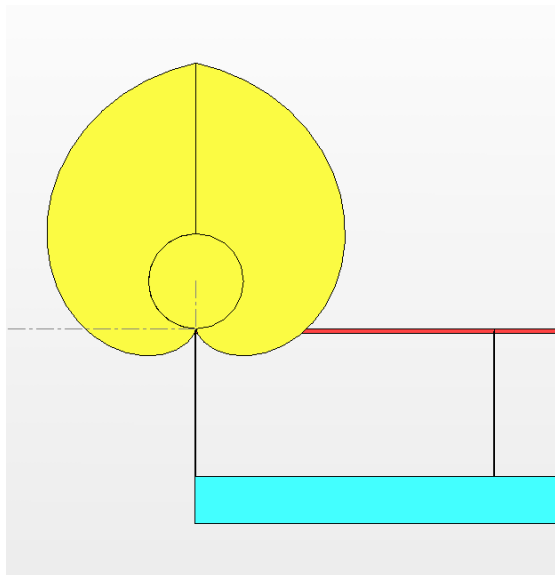
L'angle gamma nécessaire pour guider sur un tour est de 278°

Le guidage n'est pas bilatéral,

Il y a collision du profil avec la dent de la crémaillère suivante



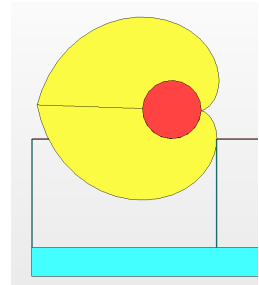
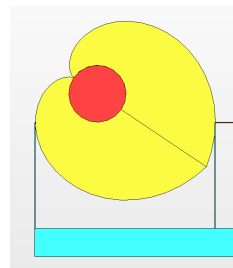
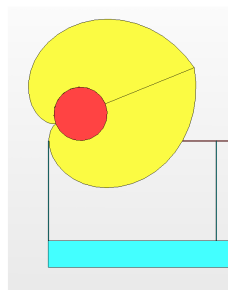
II) Développante "coeur"



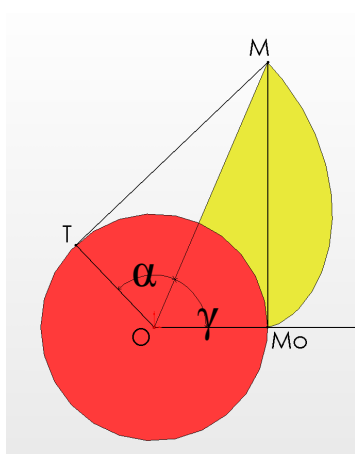
objectif : guider avec un contre profil en développante pour avoir la bilatéralité du contact.

l'angle de dent de 180° ne guide que sur 257° , mais ensuite la contre dent guide jusqu'à la fin du tour

Il n'y a bilatéralité du contact qu'en milieu de mouvement entre 103° ($360-257$) et 257° .



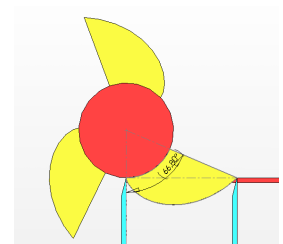
III) Développante "non collision"



Comme le guidage est meilleur en début de développante (rapport θ/γ), on limitera l'étendue de la dent et l'on répètera le profil d'autant que nécessaire (plusieurs dents). L'épaisseur maximum du profil de dent pour éviter la collision est définie par la construction ci-contre : la développante s'arrête au croisement de la tangente au rayon de base issu de M_0 .

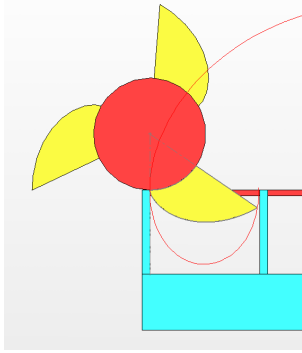
comme les triangles OM_0M et OMT sont symétriques alors $\alpha = \gamma$
or $\gamma = \tan(\alpha) - \alpha$ donc $\tan(\gamma) = 2\gamma$ soit $\gamma = 66,8^\circ$

la dent guide sur $133,8$ degrés, avec 3 dents, on guide largement sur un tour.



Pour éviter la collision, il faut un minimum de 2,69 dents

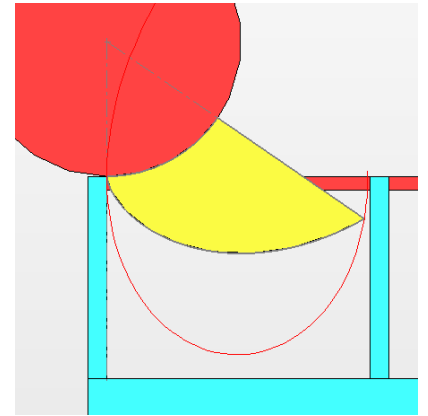
IV) Développante "turbine"



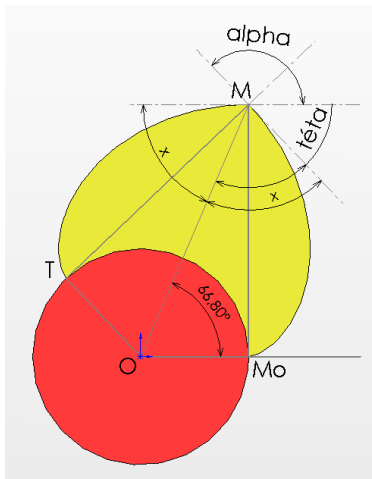
Pour la répétitivité du mouvement sur plusieurs tours, il est nécessaire de guider sur un tour exactement :
soit 120° de guidage au lieu de $133,8$, ce qui correspond à $55,54^\circ$ d'épaisseur angulaire de profil.

Cela réserve une petite épaisseur de dent pour la crémaillère.

La trajectoire de la pointe de la dent en trochoïde définit le raccordement pour la crémaillère.



V) Développante "came"



L'idée est de redescendre sur un contre profil de dent en développante identique mais inverse, de façon à avoir un encombrement constant sur la ligne d'action.

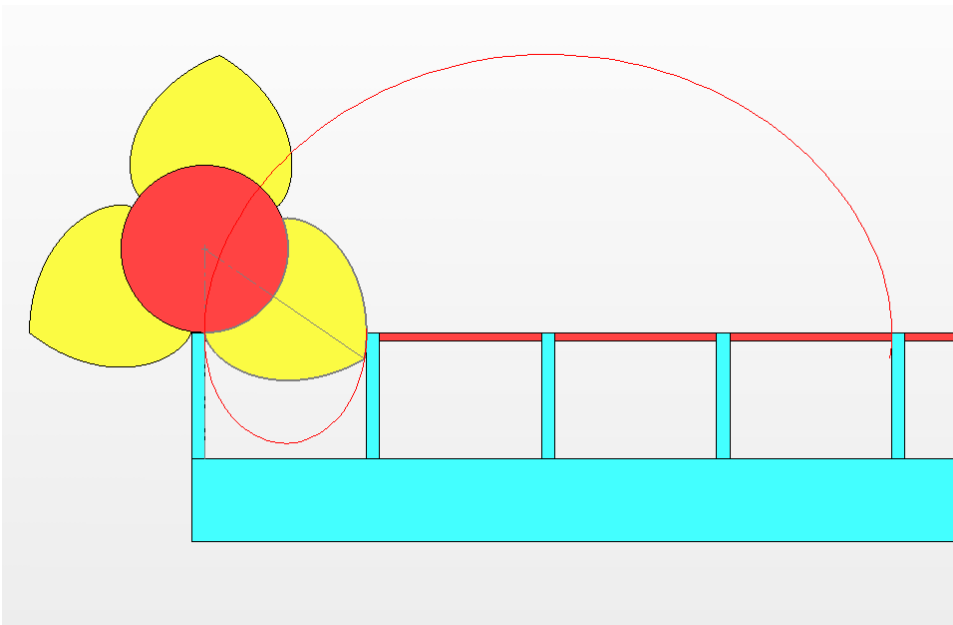
en symétrisant le profil de dent, le profil de départ de la développante doit être perpendiculaire à la ligne de contact.

d'où $x=\gamma$ $x=\theta$ et $\alpha=2 \cdot x$ d'où d'où $\gamma=\theta=\alpha/2$ d'où $\gamma=66,8^\circ$

Pour assurer la bilatéralité, il faut un minimum de 2,69 dents

Il existe donc une seule solution pour assurer un guidage avec la contredent avec un angle de pression nul : $Z=2,69$
Si l'on veut un guidage sur plusieurs tours, on s'aperçoit que le guidage bilatéral avec angle de pression nul est impossible.

VI) Développante "trèfle"

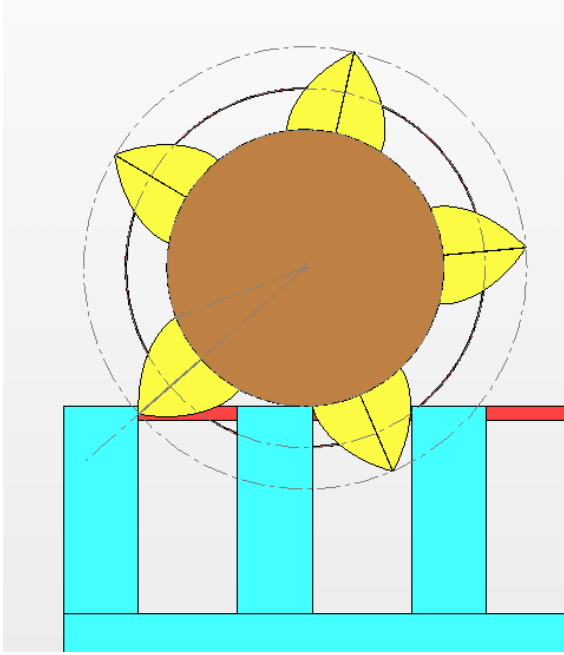


C'est le nombre de dents minimum pour assurer un engrenement continu sur plusieurs tours.

En passant de 2,69 à 3 dents, cela ménage un espace pour l'épaisseur du profil de la crémaillère.

Le contreguidage n'est pas symétrique au contact principal, mais légèrement décalé. (le changement de dent n'a pas lieu de façon simultanée entre les 2 sens, mais le contact est continu dans le temps.

VI) Développante "étoile"



Plus on augmente le nombre de dents, plus on a la place pour les dents en face et pour éventuellement épaissir les dents